СЕМИНАР 3

16. Доказать регулярность множеств слов в алфавите $\{0,1\}$.

1) Любое конечное множество слов и дополнение (до множества $\{0,1\}^*$) к конечному множеству слов.

Регулярность конечного множества слов устанавливается тривиально. Регулярность дополнения к конечному множеству слов делается так же, как в задаче 14.

3) Множество всех слов, содержащих в качестве подслова одно из слов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$.

Эта задача представляет собой несложное обобщение задачи 13.

5) Множество всех слов, которые не содержат слово 01.

Сначала устанавливаем следующий факт: если произвольное слово из данного множества содержит 0, то либо он является последним символом в слове, либо за ним следуют только символы 0. Таким образом, произвольное слово из рассматриваемого множества имеет вид 1^m0^n, где $m, n \geqslant 0$. После этого задача решается тривиально.

17 (1). Привести пример бесконечного регулярного множества, которое невозможно получить с однократным использованием операции $*$.

Такими множествами являются, например, множество $\{1^m0^n : \ m, n \geqslant 1\}$ или множество всех слов в алфавите $\{0\}$, длины которых кратны либо двум, либо трем.

Рассмотрим первый пример. Очевидно, что хотя бы одну операцию $*$ использовать необходимо. Пусть эта операция единственна и X — конечное множество, подвергаемое итерации. Если в X входит слово, состоящее только из нулей (только из единиц), то в X^* будут содержаться слова, состоящие из сколь угодно большого числа нулей (единиц). Понятно, что оставшаяся часть регулярного выражения может добавить слева лишь ограниченное число единиц (справа лишь ограниченное число нулей). Если же в X входит слово, которые содержит оба символа 0,1, то в X^* будут присутствовать слова со сколь угодно большим чередованием символов 0 и 1. Это свойство, разумеется, будет сохраняться и при умножении множества X^* (слева или справа) на любые конечные множества.

18. Пусть X — регулярное множество в алфавите $\{a_1, \ldots, a_m\}$, $Y_1, \ldots \ldots, Y_m$ — произвольные регулярные множества. Доказать, что множество $S^{a_1 \ldots a_m}_{Y_1 \ldots Y_m} X$, полученное в результате одновременной замены букв $a_1, \ldots, a_m$ в любом слове из X множествами $Y_1, \ldots, Y_m$, является регулярным множеством.

В соответствующем регулярном выражении для множества X следует заменить буквы $\{a_1, \ldots, a_m\}$ регулярными выражениями для множеств $Y_1, \ldots, Y_m$.

20. Пусть X — регулярное множество, $\mathrm{Rev}(X)$ — множество обращений всех слов из X (т.е. слов, прочитанных справа налево). Доказать, что множество $\mathrm{Rev}(X)$ регулярно.

В регулярном выражении для множества X необходимо поменять местами сомножители во всех произведениях.

22. Пусть X — конечно-автоматное множество в алфавите A, Y — конечно-автоматное множество в однобуквенном алфавите. Обозначим через X/Y множество всех тех слов из X, длины которых являются длинами слов из Y. Доказать, что множество X/Y конечно-автоматно.

Необходимо построить прямое произведение автоматов, допускающих множества X и Y, при этом в автомате для множества Y каждый переход осуществлять под действием любой буквы из алфавита автомата X. Далее следует объвить заключительными состояниями те пары, в которых обе компоненты суть заключительные состояния соответствующих автоматов.